1167. 群論ニ於ケル一例

中山　正（名大）

「各元ノ order ガ或ル m ヲ越ヘナイ直既約ナ有限群ノ order ハ（m デキマル上限デ）有限デアラウカ」トイフ角谷サンノ問題, 勿論ソレハホンノ食後ノ話題トシテ提出サレタノデスガ, ヲ面白ク思ヒマシテ考ヘテ見マシタノデ, オ茶飲話トシテ御報告シマス。反例;

$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_N$ ナル N個ノ元デ生成サレ, 次ノ様ナ関係デ定義サレタ群Gヲ考ヘル。

$$a_1^9 = a_2^9 = \cdots\cdots = a_N^9 = 1$$

$$a_{n+1} a_n = a_n^4 a_{n+1}, \quad a_{n+k} a_n = a_n a_{n+k} \quad (k \geqq 2)$$

然ラバ, コノ Gノ元ハスベテ

$$(*) \quad a_1^{e_1} a_2^{e_2} \cdots\cdots a_N^{e_N} \qquad (0 \leqq e_n \leqq 8)$$

ナル形ニ, 而モ一意的ニ表ハサレル（Gノ order $= 9^N$）

コレハ例ヘバ, $\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \cdots\cdots$ トイフ風ニ次々ニ擴張シテ行ケバワカル. ソノ際効イテ来ルコトハ

$$4^3 = 1 \quad \text{従ッテ勿論} \quad 4^9 = 1 \mod 9$$

ナルコト, 及ビ

$$4^4 \equiv 4 \mod 9, \quad \text{従ッテ} \quad a_{n+1} a_n = a_n^4 a_{n+1}$$

ナル関係ガ a_{n+2} ニヨル交換デ係タレル事デアル。

扨テ，コノ G ノ各元ノ order ハ 9 ヲワル，何故ナラ上記ノ元ノ 9 乗ハ

$$a_1^{e_1(1+4^{e_2}+(4^{e_2})^2+\cdots\cdots+(4^{e_2})^8)}a_2^{e_2(1+4^{e_3}+\cdots\cdots+(4^{e_3})^8)}\cdots\cdots a_N^{9e_N}$$

デアリ、コヽニ

$$1+4^{e_n}+\cdots\cdots+(4^{e_n})^8\equiv 0 \mod 9$$

デアル．ソレハ $(1+4+7)+(1+4+7)+(1+4+7)\equiv 0 \mod 9$ 等カラ確メラレル。

G ノ元 $a_1^{e_1}a_2^{e_2}\cdots\cdots a_N^{e_N}$ デスベテノ e_n ガ $\equiv 0\ (3)$ ナル元ハ G ノ核心ニ属シ，而モ G ノ核心ハカヽル元ノミヨリナルコトハ直チニ知ラレル。核心ヲ Z デ表ハス．G/Z ハスデニ可換群ナルコトハ定義ノ関係式ヲ見レバ明カデアル。事實 $(3, 3, \cdots\cdots, 3)$ ノ可換群デアル。

扨テ G ガ直既約デアルコトヲ証明シヨウ。ソノタメ假ニ G ガ直既約デナイトシ，$G=H\times K$ トシ，H ノ元ヲ一般ニ

$$(*)\quad x=a_1^{e_1}a_2^{e_2}\cdots\cdots a_N^{e_N}$$

デ表ハシ，K ノ元ヲ一般ニ

$$(**)\quad y=a_1^{f_1}a_2^{f_2}\cdots\cdots a_N^{f_N}$$

デ表ハサウ。

今假ニ $H \subseteqq Z$ トスル。然ラバ G/Z ノ各類ハ K ノ元デ代表サレルカラ，ドノ n ニ對シテモ，$f_n \not\equiv 0\,(3)$, $f_k \equiv 0\,(3)$ $(k=1,2,\cdots\cdots,n-1,n+1,\cdots\cdots N)$ ナル元 y ガアル．コノ y ニ對シテ

$$y^3 \equiv a_n^{3f_n} \qquad (f_n \not\equiv 0\,(3))$$

ナルコトハ上記9乘ノ計算ト同樣ニシテ知ラレル。ヨッテ $a_n^3 \in K$．n ハ任意ダカラ $Z \subseteqq K$，ヨッテ $H \subseteqq K$ デ，コレハ矛盾．ヨッテ <u>$H \not\subseteq Z$</u>，同樣ニ $K \not\subseteq Z$ デアル。

サテ，

$$xy = a_1^{e_1+4^{e_2}f_1}\, a_2^{e_2+4^{e_3}f_2} \cdots\cdots a_{N-1}^{e_{N-1}+4^{e_N}f_{N-1}}\, a_N^{e_N+f_N}$$

デアリ，yx ハ e_n ト f_n ヲ取換ヘテ得ラレル．然ルニ $xy = yx$ デアルカラ，$n = 2,3,\cdots\cdots,N$ ニ對シテ

$$e_{n-1} + 4^{e_n} f_{n-1} \equiv f_{n-1} + 4^{f_n} e_{n-1} \qquad (\mathrm{mod}\ 9)$$

即チ $f_{n-1}(4^{e_n}-1) \equiv e_{n-1}(4^{f_n}-1)\ (\mathrm{mod}\ 9)$ デアル。

然ルニ 4^r-1 ハ3デ割レ $(4^r-1)/3 \equiv r \bmod 3$ デアル。ヨッテ

$$f_{n-1}\, e_n \equiv e_{n-1}\, f_n \quad (\mathrm{mod}\ 3)$$

ナル關係ヲウル。コレガ任意ノ $x \in H$，$y \in K$，$n = 2,\cdots\cdots,N$ ニ對シテ成立ツ。

<u>ソコデ次ニスベテノ x ニツキ $e_n \equiv 0\,(3)$ ナル如キ n ハ存在シナイ</u>コトヲ證明スル．假ニ若シソノ樣ナ n ガアレバ

$G = H \times K$ ダカラ $f_n \not\equiv 0(3)$ ナル y ガアル。コノ y ト任意ノ $x \in H$ ヲ考ヘルニ

$$f_n e_{n-1} \equiv e_n f_{n-1} \pmod 3, \quad f_n \not\equiv e_n \equiv 0(3)$$

カラ $e_{n-1} \equiv 0(3)$. 従ッテ K ノ或ル(前ノ y トハ違フデアラウ) y デ $f_{n-1} \not\equiv 0(3)$ ナルモノアリ, 従ッテ任意ノ $x \in H$ ニ對シ $e_{n-2} \equiv 0(3)$, ----- トナリ結局 H ノ任意ノ x ニ對シ $e_n \equiv e_{n-1} \equiv \ldots\ldots \equiv e_1 \equiv 0(3)$ トナル。同様ニ $e_n \equiv e_{n+1} \equiv \ldots\ldots \equiv e_N \equiv 0(3)$ トナル。ヨッテ $H \subset Z$ トナリイケナイ。

同様ニ總テノ y ニツキ $f_n \equiv 0(3)$ ナル n モ存在シナイ。

次ニ或ル n ニ對シ $e_{n-1} \not\equiv e_n \equiv 0(3)$ ナル元 $x \in H$ ガアッタトスル。然ラバ $e'_n \not\equiv 0(3)$ ナル H ノ元

$$x' = a_1^{e'_1} a_2^{e'_2} \cdots\cdots a_N^{e'_N}$$

ガアル。今 xx' 及ビ x^2x' ヲ同様ナ normal form ニ書イタ時ノ指數ヲ e^*_k, e^{**}_k デ表セバ

$$e^*_{n-1} \equiv e_{n-1} + e'_{n-1} \not\equiv 2e_{n-1} + e'_{n-1} \equiv e^{**}_{n-1} \quad (3),$$

$$e^*_n \equiv e^{**}_n \equiv e'_n \not\equiv 0(3)$$

デアル。扨 K ノ元 y デ $f_n \not\equiv 0(3)$ ナルモノヲトレバ, y ハ xx' トモ x^2x' トモ可換ダカラ

$$e^*_{n-1} f_n \equiv e^*_n f_{n-1} \equiv e^{**}_n f_{n-1} \equiv e^{**}_{n-1} f_n (3)$$

コレハ矛盾デアル。同様ニ $e_x \neq e_{x-1} \equiv 0\ (3)$ ナル x モ存在シナイ。

カクテ<u>H ノ元 x ニツキ或ル $e_x \not\equiv 0\ (3)$ ナラスベテノ $e_x \not\equiv 0\ (3)$ デアル</u>。<u>K ノ元 y ニツイテモ同様デアル</u>。ソコデ (＊), (＊＊) ヲソノ様ナスベテノ e_x, f_x ガ $\not\equiv 0\ (3)$ ナル H, K ノ元トスレバ

$$\frac{e_1}{f_1} \equiv \frac{e_2}{f_2} \equiv \cdots\cdots \equiv \frac{e_N}{f_N} \qquad (\mathrm{mod}\ 3).$$

即チ y ハ mod Z デ x ノ或ル巾デアル。

ヨッテ　$K \subseteq \{x\} Z$

同様ニ　$H \subseteq \{y\} Z$

故ニ　$G = H \times K = \{y\} Z K = Z K = \{x\} Z$

シカシ G/Z ハ cyclic デナイカラ矛盾.

コレデ G ガ直既約ナコトガワカッタ。

カクテ<u>G ハ直既約、ソノ各元ノ order ハ高々 9, 而モ G ノ order ハ 9^N デ, N ヲ大キクスレバ幾ラデモ大キクナル</u>。